

1409. Исследовать функцию и построить её график.

$$y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}.$$

Решение.

1) Область определения.

$$x \neq -2,$$

следовательно,

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$$

2) Чётность.

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{-x + 2} = -\frac{x^2 - 3}{x - 2} \neq \pm y(x),$$

следовательно, функция не является ни чётной, ни нечётной.

3) Точки пересечения с осями.

Положим $x = 0$, тогда $y = -3/2$, следовательно, ось Oy график функции пересекает в точке $(0; -3/2)$,

положим $y = 0$, тогда $x^2 - 3 = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, следовательно, ось Ox график функции пересекает в точках $(\pm\sqrt{3}; 0)$.

4) Асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2 - 3}{x + 2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 - 3}{x + 2} = +\infty,$$

следовательно, прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x(x + 2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x - 3}{x + 2} = -2,$$

следовательно, прямая $y = x - 2$ является наклонной асимптотой.

5) Интервалы монотонности, точки экстремума.

$$y = \frac{x^2 - 3}{x + 2},$$

$$y' = \frac{2x \cdot (x + 2) - (x^2 - 3) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 3}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = \frac{(x + 3)(x + 1)}{(x + 2)^2}.$$

$$y' = 0 \text{ при } x = -3 \text{ и } x = -1.$$

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -2)$	$(-2; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	\nearrow	-6	\searrow	\searrow	-2	\nearrow

max

min

6) Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

$$y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2},$$

$$y'' = \frac{(2x + 4) \cdot (x + 2)^2 - (x^2 + 4x + 3) \cdot 2(x + 2)}{(x + 2)^4} = \frac{2(x + 2)(x + 2) - 2(x^2 + 4x + 3)}{(x + 2)^3} =$$

$$= \frac{2(x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4x - 3)}{(x + 2)^3} = \frac{2}{(x + 2)^3}.$$

$y'' \neq 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; +\infty)$
y''	-	+
y	∩	∪

7) Строим график.

