2381. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx.$$

Решение.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\cos x\,dx.$$

Интегрируем по частям:

$u = e^{-x}$, $\quad dv = \cos x\,dx$,

$du = -e^{-x}dx$, $\quad v = \sin x$.

Тогда:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-x}\sin x\,\Big|_0^b\right) + \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\sin x\,dx.$$

Ещё раз интегрируем по частям:

$u = e^{-x}$, $\quad dv = \sin x\,dx$,

$du = -e^{-x}dx$, $\quad v = -\cos x$.

Тогда:

$$\lim_{b\to\infty}\left(e^{-x}\sin x\,\Big|_0^b\right) + \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\sin x\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-x}\sin x\,\Big|_0^b\right) - \lim_{b\to\infty}\left(e^{-x}\cos x\,\Big|_0^b\right) - \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\cos x\,dx.$$

Откуда:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-x}[\sin x - \cos x]\,\Big|_0^b\right) - \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\cos x\,dx,$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-x}[\sin x - \cos x]\,\Big|_0^b\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-b}[\sin b - \cos b] - \frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2}.$$