379. С помощью теории функции комплексного переменного, вычислите интеграл от функции действительного переменного.

$$\int_0^\infty \frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2}, \qquad a>0.$$

Решение.

Так как подынтегральная функция чётная, то:

$$\int_0^\infty \frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2}.$$

Для того чтобы применить теорему Коши о вычетах, вводим функцию комплексной переменной:

$$f(z) = \frac{z^6}{(z^4+a^4)^2} = \frac{P_6(z)}{Q_8(z)}.$$

Строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-\rho;\rho]$ и полуокружности $C_\rho = \{|z| = \rho, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, выбрав ρ так, чтобы все особые точки z_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах:

$$\int_{-\rho}^{\rho} \frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2} + \int_{C_\rho} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (*)$$

Переходим к пределу при $\rho \to +\infty$. Так как степени многочленов P_6 и Q_8 удовлетворяют соотношению $m \geq n+2$, то:

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int_{C_\rho} f(z)dz = 0.$$

Поскольку правая часть в уравнении (*) не зависит от ρ, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{z^6}{(z^4+a^4)^2},$$

где z_k – особые точки функции:

$$f(z) = \frac{z^6}{(z^4+a^4)^2},$$

лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

Особыми точками функции:

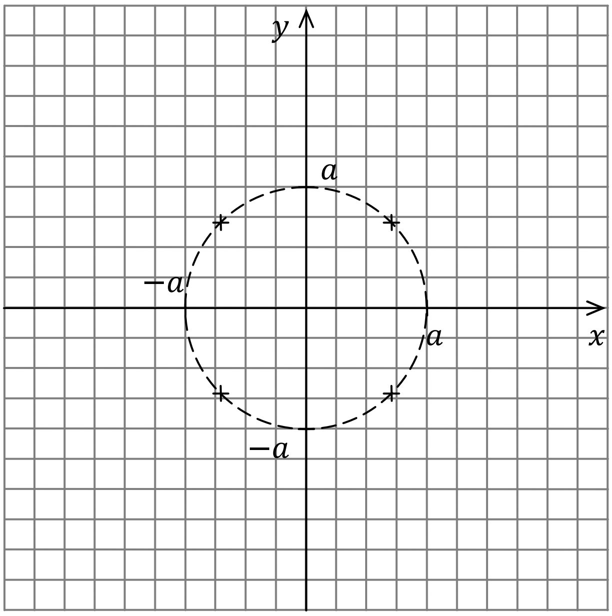
$$f(z) = \frac{z^6}{(z^4+a^4)^2}$$

являются нули знаменателя – корни уравнения $z^4 + a^4 = 0$.

Находим корни:

$z^4 = -a^4$,

$z_k = ae^{\frac{\pi+2\pi k}{4}i} = ae^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)i}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$



В верхней полуплоскости находятся точки $z_1 = ae^{\frac{\pi}{4}i}$ и $z_1 = ae^{\frac{3\pi}{4}i}$. Вычисляем вычеты в этих точках. Так как обе точки – полюсы второго порядка функции $f(z)$, то:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1}\left[\frac{z^6}{(z^4+a^4)^2}\right] = \operatorname*{res}_{z=z_1}\left[\frac{z^6}{(z-z_1)^2(z-z_3)^2(z^2+ia^2)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2\cdot\frac{z^6}{(z-z_1)^2(z-z_3)^2(z^2+ia^2)^2}\right] = \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^6}{(z-z_3)^2(z^2+ia^2)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{6z^5(z-z_3)^2(z^2+ia^2)^2 - z^6[2(z-z_3)(z^2+ia^2)^2 + (z-z_3)^2 2(z^2+ia^2)2z]}{(z-z_3)^4(z^2+ia^2)^4} =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{6z^5(z-z_3)(z^2+ia^2) - 2z^6[z^2+ia^2+2z(z-z_3)]}{(z-z_3)^3(z^2+ia^2)^3} =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{2z^5(3[z^3-z^2z_3+ia^2z-ia^2z_3] - z[z^2+ia^2+2z^2-2zz_3])}{(z-z_3)^3(z^2+ia^2)^3} =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{2z^5(3z^3-3z^2z_3+3ia^2z-3ia^2z_3-z^3-ia^2z-2z^3+2z^2z_3)}{(z-z_3)^3(z^2+ia^2)^3} =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{2z^5(-z^2z_3+2ia^2z-3ia^2z_3)}{(z-z_3)^3(z^2+ia^2)^3} = \frac{2a^5e^{\frac{5\pi}{4}i}\left(-a^2e^{\frac{2\pi}{4}i}ae^{\frac{5\pi}{4}i} + 2ia^2ae^{\frac{\pi}{4}i} - 3ia^2ae^{\frac{5\pi}{4}i}\right)}{\left(ae^{\frac{\pi}{4}i} - ae^{\frac{5\pi}{4}i}\right)^3\left(a^2e^{\frac{2\pi}{4}i}+ia^2\right)^3} =$$

$$= \frac{2e^{\frac{2\pi}{4}i}\left(-e^{\frac{7\pi}{4}i} + 2ie^{\frac{\pi}{4}i} - 3ie^{\frac{5\pi}{4}i}\right)}{(1-e^{\pi i})^3(i+i)^3a} = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}i}(-1-2-3)}{2^3(2i)^3a} = \frac{3e^{\frac{\pi}{4}i}}{16ia};$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2}\left[\frac{z^6}{(z^4+a^4)^2}\right] = \lim_{z\to z_2}\frac{2z^5(-z^2z_5-2ia^2z+3ia^2z_5)}{(z-z_5)^3(z^2-ia^2)^3} =$$

$$= \frac{2a^5e^{\frac{15\pi}{4}i}\left(-a^2e^{\frac{6\pi}{4}i}ae^{\frac{7\pi}{4}i} - 2ia^2ae^{\frac{3\pi}{4}i} + 3ia^2ae^{\frac{7\pi}{4}i}\right)}{\left(ae^{\frac{3\pi}{4}i} - ae^{\frac{7\pi}{4}i}\right)^3\left(a^2e^{\frac{6\pi}{4}i}-ia^2\right)^3} = \frac{2e^{\frac{6\pi}{4}i}\left(-e^{\frac{13\pi}{4}i} - 2ie^{\frac{3\pi}{4}i} + 3ie^{\frac{7\pi}{4}i}\right)}{(1-e^{\pi i})^3(-i-i)^3a} =$$

$$= \frac{2e^{\frac{3\pi}{4}i}(-1-2-3)}{2^3(-2i)^3a} = -\frac{3e^{\frac{3\pi}{4}i}}{16ia}.$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+a^4)^2} = 2\pi i \left(\frac{3e^{\frac{\pi}{4}i}}{16ia} - \frac{3e^{\frac{3\pi}{4}i}}{16ia} \right) = \frac{3\pi}{8a} \left(e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{3\pi}{4}i} \right) = \frac{3\pi}{8a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a},$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+a^4)^2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16a}.$$