25.6. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду.
$u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x + 4u_y = 0.$

Определяем коэффициенты уравнения a_{11}, a_{12} и a_{22}. Имеем:
$a_{11} = 1, \qquad a_{12} = -4, \qquad a_{22} = 16.$

Вычисляем выражение:
$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-4)^2 - 1 \cdot 16 = 0.$

Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ при всех x, y, данное уравнение является уравнением параболического типа во всей плоскости xOy.
Находим общие интегралы уравнения характеристик:
$(dy)^2 - (-8)dydx + 16(dx)^2 = 0.$

Решаем это уравнение относительно dy:
$(dy + 4dx)^2 = 0,$
$dy = -4dx.$

Следовательно, уравнение характеристик имеет единственный интеграл:
$h_1(x, y) = y + 4x.$

Делаем замену переменных:
$\xi = y + 4x, \qquad \eta = y.$

При этом по правилу дифференцирования сложной функции:
$u_x = u_\xi \cdot 4 + u_\eta \cdot 0 = 4u_\xi,$
$u_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 1 = u_\xi + u_\eta,$
$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot 4^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 4 \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0 = 16u_{\xi\xi},$
$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot 4 \cdot 1 + u_{\xi\eta}(4 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + u_{\eta\eta} \cdot 0 \cdot 1 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0 = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta},$
$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$

Подставляя в исходное уравнение, получим:
$16u_{\xi\xi} - 8(4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta}) + 16(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 4u_\xi + 4(u_\xi + u_\eta) = 0,$
$16u_{\xi\xi} - 32u_{\xi\xi} - 32u_{\xi\eta} + 16u_{\xi\xi} + 32u_{\xi\eta} + 16u_{\eta\eta} - 4u_\xi + 4u_\xi + 4u_\eta = 0,$
$16u_{\eta\eta} + 4u_\eta = 0,$
$4u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$

Составляем соответствующее характеристическое уравнение:
$4k^2 + k = 0.$

Находим его корни:
$k(4k + 1) = 0,$
$k_1 = 0, \qquad k_2 = -\frac{1}{4}.$

Следовательно, общее решение канонического уравнения можно записать в виде:
$u(\xi, \eta) = C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-\eta/4},$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.
Подставляя $\xi = y + 4x$ и $\eta = y$, получаем общее решение исходного уравнения:
$u(x, y) = C_1(y + 4x) + C_2(y + 4x)e^{-\eta/4}.$