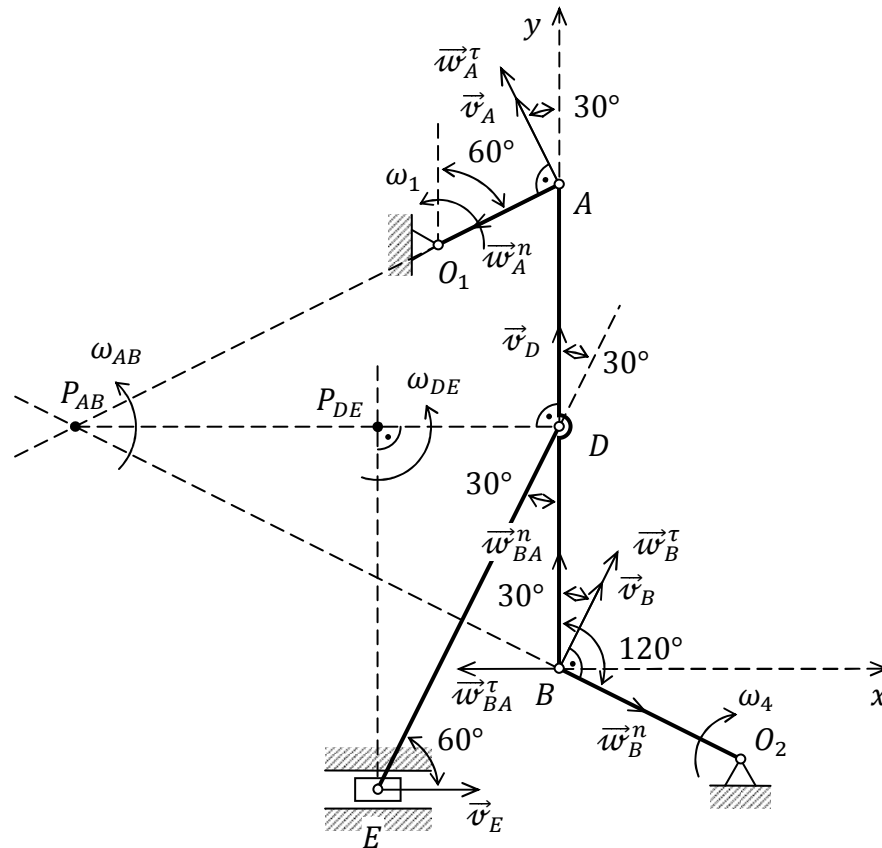


Задание К.5. Плоскопараллельное движение твёрдого тела.

На рисунке К.5.1 показана схема механизма, причём $O_1A = l_1 = 0,4$ м; $AB = l_2 = 1,4$ м; $DE = l_3 = 1,2$ м; $O_2B = l_4 = 0,6$ м. Точка D находится посередине звена AB .

Кривошип O_1A вращается вокруг оси O_1 с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \omega_{O_1A} = 4$ с⁻¹. Для заданного положения механизма построить мгновенные центры скоростей шатунов AB и DE , найти скорости точек A, B, D, E , угловые скорости указанных шатунов и кривошипа O_2B , а также ускорение точки B .



Решение.

Кривошипы O_1A и O_2B совершают вращательное движение вокруг неподвижных точек O_1 и O_2 соответственно, звенья AB и ED – плоскопараллельное движение, ползун E – поступательное движение вдоль горизонтальной направляющей.

Находим скорость точки A кривошипа O_1A :

$$v_A = \omega_{O_1A} O_1A = \omega_1 l_1 = 4 \cdot 0,4 = 1,60 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости \vec{v}_A перпендикулярен радиусу O_1A и направлен в сторону вращения кривошипа. Вектор \vec{v}_B точки B перпендикулярен радиусу O_2B и направлен так, чтобы его проекция и проекция вектора \vec{v}_A точки A на прямую AB были одного знака. По теореме о проекциях скоростей двух точек тела:

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 30^\circ,$$

откуда:

$$v_B = \frac{v_A \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1,60 \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 1,60 \text{ м/с.}$$

Находим положение мгновенного центра скоростей звена AB . Из точек A и B восстанавливаем перпендикуляры к направлениям скоростей \vec{v}_A и \vec{v}_B . Точка P_{AB} пересечения этих перпендикуляров является мгновенным центром скоростей звена AB . Треугольник $AP_{AB}D$ – прямоугольный, следовательно,

$$AP_{AB} = \frac{AD}{\cos 60^\circ} = \frac{0,5l_2}{\cos 60^\circ}.$$

Тогда угловая скорость звена AB :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_A \cos 60^\circ}{0,5l_2} = \frac{1,60 \cos 60^\circ}{0,5 \cdot 1,4} = 1,14 \text{ с}^{-1}.$$

Так как $DP_{AB} = AD \operatorname{tg} 60^\circ = 0,5l_2 \operatorname{tg} 60^\circ$, то скорость точки D :

$$v_D = \omega_{AB} DP_{AB} = \omega_{AB} \cdot 0,5l_2 \operatorname{tg} 60^\circ = 1,14 \cdot 0,5 \cdot 1,4 \operatorname{tg} 60^\circ = 1,38 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{v}_E ползуна E направлен так, чтобы его проекция и проекция вектора \vec{v}_D точки D на прямую DE были одного знака. По теореме о проекциях скоростей двух точек тела:

$$v_E \cos 60^\circ = v_D \cos 30^\circ,$$

$$v_E = \frac{v_D \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{1,38 \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 2,39 \text{ м/с.}$$

Находим положение мгновенного центра скоростей звена DE . Из точек D и E восстанавливаем перпендикуляры к направлениям скоростей \vec{v}_D и \vec{v}_E . Точка P_{DE} пересечения этих перпендикуляров является мгновенным центром скоростей звена DE . Из рисунка находим, что $DP_{DE} = DE \cos 60^\circ = l_3 \cos 60^\circ$. Тогда угловая скорость звена DE :

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{DP_{DE}} = \frac{v_D}{l_3 \cos 60^\circ} = \frac{1,38}{1,2 \cos 60^\circ} = 2,30 \text{ с}^{-1}.$$

Найдём угловую скорость кривошипа O_2B :

$$\omega_{O_2B} = \omega_4 = \frac{v_B}{O_2B} = \frac{v_B}{l_4} = \frac{1,60}{0,6} = 2,67 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения ускорения \vec{w}_B точки B воспользуемся равенством:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}$$

или

$$\vec{w}_B^\tau + \vec{w}_B^n = \vec{w}_A^\tau + \vec{w}_A^n + \vec{w}_{BA}^\tau + \vec{w}_{BA}^n. \quad (1)$$

Вычисляем значения ускорений, входящих в эту формулу:

$$w_A^\tau = \varepsilon_{O_1A} O_1A = 0, \quad (\omega_1 = \text{const}, \quad \varepsilon_{O_1A} = \varepsilon_1 = 0);$$

$$w_A^n = \omega_{O_1A}^2 O_1A = \omega_1^2 l_1 = 4^2 \cdot 0,4 = 6,40 \text{ м/с}^2;$$

$$w_B^n = \omega_{O_2B}^2 O_2B = \omega_4^2 l_4 = 2,67^2 \cdot 0,6 = 4,28 \text{ м/с}^2;$$

$$w_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB = 1,14^2 \cdot 1,4 = 1,82 \text{ м/с}^2.$$

Значения w_B^τ и w_{BA}^τ найдём, спроектировав формулу (1) на оси координат Bx :

$$w_B^\tau \cos 30^\circ - w_B^n \cos 60^\circ = w_A^\tau \cos 30^\circ - w_A^n \cos 60^\circ + w_{BA}^n;$$

$$w_B^\tau \cos 60^\circ + w_B^n \cos 30^\circ = -w_A^\tau \cos 60^\circ - w_A^n \cos 30^\circ - w_{BA}^\tau.$$

Решая эту систему, находим:

$$\begin{aligned} w_B^\tau &= \frac{w_B^n \cos 60^\circ + w_A^\tau \cos 30^\circ - w_A^n \cos 60^\circ + w_{BA}^n}{\cos 30^\circ} = \\ &= \frac{4,28 \cos 60^\circ + 0 \cos 30^\circ - 6,40 \cos 60^\circ + 1,82}{\cos 30^\circ} = 0,88 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{BA}^\tau &= -w_B^\tau \cos 60^\circ - w_B^n \cos 30^\circ - w_A^\tau \cos 60^\circ - w_A^n \cos 30^\circ = \\ &= -0,88 \cos 60^\circ - 4,28 \cos 30^\circ - 0 \cos 60^\circ - 6,40 \cos 30^\circ = -9,69 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Тогда ускорение точки B :

$$w_B = \sqrt{(w_B^\tau)^2 + (w_B^n)^2} = \sqrt{0,88^2 + 4,28^2} = 4,37 \text{ м/с}^2.$$

Результаты расчётов приведены в таблице.

Скорость, м/с				Угловая скорость, с ⁻¹			Ускорение, м/с ²
v_A	v_B	v_D	v_E	ω_{AB}	ω_{DE}	ω_{O_2B}	w_B
1,60	1,60	1,38	2,39	1,14	2,30	2,67	4,37